10.11.05

Theorie der Programmierung I

(Mitschrift von Lars Friedrich email@lars-friedrich-home.de und Florian Haug)

„⇒“: Es gelte $e \xrightarrow{*} v$, z.z. $e \Downarrow v$

Beweistechnik: Induktion über die Länge der Berechnung $e \xrightarrow{*} v$? (d.h. über die Anzahl der small steps)

Induktionsanfang: $e \to^0 v$. Dann ist $e=v$, also gilt $e \Downarrow v$ wegen (VAL)

Induktionsschritt: $e \xrightarrow{+} v$. Fallunterscheidung über die Form von e

1. Fall: $e = \text{rec id } e_1$. Dann ist $e \xrightarrow{*} v$ von der Form
$e = \text{rec id } e_1 \to$ (UNFOLD) $e_1[\text{rec id } e_1/\text{id}] \xrightarrow{*} v$. Nach Induktionsannahme gilt dann $e_1[\text{rec id } e_1/\text{id}] \Downarrow v$. Mit big step Regel (UNFOLD) folgt dann: $\text{rec id } e_1 \Downarrow v$
(| e)

2. Fall: $e = \text{if } e_0 \text{ then } e_1 \text{ else } e_2$. Die Bedingung $e \xrightarrow{*} v$ muss von der Form sein:
$\text{if } e_0 \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \xrightarrow{*} \text{if true the } e_1 \text{ else } e_2 \to e_1 \xrightarrow{*} v$ oder von der Form:
(mit (COND-TRUE) aus $e_0 \to$ true | | (COND-TRUE))
$\text{if } e_0 \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \xrightarrow{*} \text{if false the } e_1 \text{ else } e_2 \to e_2 \xrightarrow{*} v$ sein.
(mit (COND-FALSE) aus $e_0 \to$ false | | (COND-FALSE))
(Andere Möglichkeiten, z.B. $e_0 \xrightarrow{*} 1$, kommen nicht in Frage, denn dann würde die Berechnung von e stecken bleiben.)
Die Berechnung $e_0 \xrightarrow{*} \text{true}$ (bzw. $e_0 \xrightarrow{*} \text{false}$) und $e_1 \xrightarrow{*} v$ (bzw. $e_2 \xrightarrow{*} v$) sind kürzer als $e \xrightarrow{*} v$ (weil zwischen beiden der (COND-TRUE)- bzw. (COND-FALSE)-Schritt liegt). Also ist auf sie jeweils die Induktionsannahme anwendbar und es folgt $e_0 \Downarrow \text{true}$ und $e_1 \Downarrow v$ bzw. $e_0 \Downarrow \text{false}$ und $e_2 \Downarrow v$. Also folgt $\text{if } e_0 \text{ then } e_1 \text{ else } e_2 \Downarrow v$ mit big step Regel (COND-TRUE) bzw. (COND-FALSE).

3. Fall: $e = e_1 e_2$ Die Berechnung $e_1 e_2 \xrightarrow{+} v$ ist von der Form $e_1 e_2 \xrightarrow{*} v_1 e_2 \xrightarrow{*} v_1 v_2 \xrightarrow{*} v$.
(mit (APP-LEFT) aus $e_1 \xrightarrow{*} v_1$ | mit | (APP-RIGHT) aus $e_2 \xrightarrow{*} v_2$)
Für $v_1 v_2 \xrightarrow{+} v$ gibt es folgende Möglichkeiten:

(a) $v_1 v_2$ ist von der Form op n also auch v = op n, indes folgt $v_1 v_2 \Downarrow v$ wegen (VAL)

(b) $v_1 v_2$ ist von der Form $(\text{op } n_1)\ n_2$. Dann gilt $v_1 v_2 \to \text{op}^I(n_1, n_2) = v$, also gilt mit big step Regel (OP) auch $\text{op } n_1 n_2 \Downarrow \text{op}^I(n_1, n_2)$.
(| $v_1 v_2$ | v)

(c) $v_1 v_2$ ist von der Form $(\lambda \text{id. e'})\ v_2$. Dann gilt $v_1 v_2 \to$ (BETA-V) $e'[v_2/\text{id}] \xrightarrow{*} v$.
Die Berechnung $e'[v_2/\text{id}] \xrightarrow{*} v$ ist kürzer als $e \xrightarrow{*} v$, also gilt nach Induktionsannahme $e'[v_2/\text{id}] \Downarrow v$. Dann folgt auch mit big step Regel (BETA-V) $(\lambda \text{id.} e')\ v_2 \Downarrow v$.
(| $v_1 v_2$)

Andere Fälle als (a), (b), (c) kommen nicht in Frage, denn wegen $v_1 v_2 \xrightarrow{*} v$ kann nur gelten: Entweder $v_1 v_2$ ist schon ein Wert (Fall (a)), oder es muss einen ersten small step $v_1 v_2 \to e''$ geben und dafür kommen nur (BETA-V) oder (OP) in Frage (Fälle (b), (c)). Also haben wir (in allen Fällen) $v_1 v_2 \Downarrow v$ bewiesen. Wenn wir jetzt noch die Induktionsannahme auf $e_1 \xrightarrow{*} v_1$ und $e_2 \xrightarrow{*} v_2$ anwenden können, so folgt $e_1 \Downarrow v_1$ und $e_2 \Downarrow v_2$, also ergibt sich mit big step Regel (APP): $e_1 e_2 \Downarrow v$.

Problem: Die Berechnungsfolgen $e_1 \xrightarrow{*} v_1$ bzw. $e_2 \xrightarrow{*} v_2$ sind nicht unbedingt kürzer als $e \xrightarrow{*} v$, z.B. wenn e_1=op und $e_2 \xrightarrow{*} n$, dann sieht die gesamte Folge so aus:
$\text{op } e_2 \to^0$ (APP-LEFT) $\text{op } e_2 \xrightarrow{*}$ (APP-RIGHT) $\text{op } n \to^0 \text{op } n$

Fazit: Induktion über die Länge von $e \xrightarrow{*} v$ klappt nicht.

Gesucht: Anderes „Maß“ für die Induktion. Induktion über die Größe von e? Scheitert bei rekursiven Ausdrücken (1. Fall des Beweises), da der aufgefaltete Ausdruck viel größer als e sein kann.

Idee: Da in den meisten Fällen die Länge der Berechnung abnimmt, und in dem einen Ausnahmefall die Größe des Ausdrucks, versucht man beides zu kombinieren.

Induktion über die Summe der beiden Größen? (Länge von $e \xrightarrow{*} v$) + (Größe von e).
Geht nicht, weil e „unkontrolliert“ größer werden kann (z.B. beim Auffalten).

Lösung: Induktion über $\aleph$ (Natürliche Zahlen) mit der üblichen Ordnung. Funktioniert nicht → Man definiert eine neue Ordnung auf $\aleph^2$, d.h. auf Paaren (m, n).

Definition: Die **lexikographische** Ordnung auf $\aleph^2$ ist definiert durch:
$(m_1, n_1) <_{lex} (m_2, n_2) \Leftrightarrow_{def.} m_1<m_2$ oder $(m_1=m_2$ und $n_1<n_2)$ (vgl. Ordnung in einem Lexikon)
Unser Beweis gelingt, wenn wir Induktion über(Länge von $e \xrightarrow{+}$,
Größe von e)$\in \aleph$ bzgl. Der lexikographischen Ordnung auf $\aleph^2$ wählen, denn dieses „Maß“ nimmt in allen Fällen ab.

Gilt für $<_{lex}$ das „übliche“ Induktionsprinzip?

Antwort: Ja! Denn $<_{lex}$ ist eine **Noethersche Ordnung**.

Definition: Sei A eine Menge, < eine zweiteilig Relation auf A
(a) (A, <) heißt (irreflexible) partielle Ordnung, wenn < irreflexibel und transitiv ist, d.h.
- es existiert kein $a \in A$ mit $a < a$ (irreflexibel)
- f.a. $a, b, c \in A$ gilt $a < b$ und $b < c$ → $a < c$

(b) Eine irreflexible partielle Ordnung heißt noetersch, wenn es keine unendlich absteigende Folgen gibt, $a_0 > a_1 > a \ldots$

Bsp.: $(\aleph, <)$ Noethersch
$(\mathbf{Z}, c)$ nicht Noethersch
$(\aleph^2, <)$ Noethersch